Daniel Vlăducu
Márta Kása

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele V-VIII

Ediţia a VI-a

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE (N)

- Cifre romane (scrierea nepoziţională):

I – 1	V – 5
X – 10	L – 50
C – 100	D – 500
M – 1000	

- Cifre arabe (scrierea poziţională): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Numărul natural de două cifre $\overline{ab}$, unde $a \neq 0$, $\overline{ab} = 10a + b$.
- Număr natural de trei cifre $\overline{abc}$, unde $a \neq 0$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.
- Numere consecutive – numerele care au diferenţa egală cu 1.
- Număr par – numărul care dă restul 0 la împărţirea cu 2 ($2n$ – număr par).
- Număr impar – numărul care dă restul 1 la împărţirea cu 2 ($2n + 1$ – număr impar).
- Mulţimea $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ se numeşte mulţimea numerelor naturale.

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

Adunarea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a + b = c$, unde a, b – termeni; c – sumă.

Proprietăţi:

1. Comutativitatea:

$a + b = b + a$, oricare ar fi a, b numere naturale

2. Asociativitatea:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale

3. Numărul 0 este element neutru faţă de adunare:

$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi a număr natural

Scăderea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, $a \geq b$, există c număr natural astfel încât:

$a - b = c$, unde a – descăzut; b – scăzător; c – diferenţă.

Înmulţirea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a \cdot b = c$, unde a, b – factori; c – produs.

Proprietăţi:

1. Comutativitatea:

$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi a, b, numere naturale

2. Asociativitatea:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale

3. Distributivitatea:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi a, b, c numere naturale

4. Numărul 1 este element neutru faţă de înmulţire:

$a \cdot 1 = a$, oricare ar fi a număr natural

Împărţirea

Fiind date două numere naturale d şi i, $i \neq 0$, se poate scrie:

$d : i = c + r : i$, unde $0 \leq r < i$

Ordinea efectuării operaţiilor

Dacă nu sunt paranteze, se efectuează în următoarea ordine:

- înmulţirea şi împărţirea (operaţii de ordinul al doilea);
- adunarea şi scăderea (operaţii de ordinul întâi).

Dacă sunt paranteze, se efectuează calculele:

- din parantezele rotunde (mici);
- din parantezele drepte (mari);
- din acolade.

Teorema împărţirii cu rest

Oricare ar fi două numere naturale d şi i, $i \neq 0$, există două numere naturale c şi r, $0 \leq r < i$, astfel încât: $d = i \cdot c + r$.

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

RAPORT

Definiție: Raportul a două mărimi *a* şi *b* de aceeaşi natură, măsurate cu aceeaşi unitate de măsură este câtul *a*/*b* şi reprezintă un număr.

PROPORȚIE

Definiție: Egalitatea a două rapoarte.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{, unde }\left.\begin{cases} a, d-\text{extremi}\\ b, c-\text{mezi}\end{cases}\right\}\text{ termenii proporţiei}$$

Proprietatea fundamentală a proporției: Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Observație: Dacă într-o proporţie $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $b = c$, avem $b^2 = a \cdot d$, adică $b = \sqrt{a\cdot d}$, $a > 0$, $b > 0$ şi *b* este media geometrică a numerelor *a* şi *d*.

Proporţii derivate

a) cu aceiaşi termeni:

- Dacă schimbăm mezii sau extremii între ei, se obţine o nouă proporţie:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\rightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\text{ etc.}$$

- Inversa unei proporţii este tot o proporţie.

b) cu termeni schimbaţi:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm k\cdot b}{b}=\frac{c\pm k\cdot d}{d};\ \frac{a}{a\pm k\cdot b}=\frac{c}{c\pm k\cdot d},\ k\neq 0;$$

$$\frac{a\pm k\cdot c}{b\pm k\cdot d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{a+k\cdot b}{a-k\cdot b}=\frac{c+k\cdot d}{c-k\cdot d},\ k\neq 0.$$

Şir de rapoarte egale (indiferent de numărul rapoartelor)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}; \qquad \frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{c};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}; \qquad \frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

un extrem = $\dfrac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}}$; un mez = $\dfrac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}$.

Proporţionalitatea directă

$\{a, b, c, d, \ldots, z\}$ şi $\{a', b', c', d', \ldots, z'\}$ sunt direct proporţionale dacă $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'} = \ldots = \dfrac{z}{z'} = p$, unde p = coeficient de proporţionalitate.

Proporţionalitatea inversă

$\{a, b, c, d, \ldots, z\}$ şi $\{a', b', c', d', \ldots, z'\}$ sunt invers proporţionale dacă $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \ldots = z \cdot z'$.

Regula de trei simplă

Dacă a …………………… b

c …………………… $x = ?$

• pentru mărimi direct proporţionale rezultă: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{x} \Rightarrow x = \dfrac{b \cdot c}{a}$;

• pentru mărimi invers proporţionale rezultă: $c \cdot x = a \cdot b$; $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

Regula de trei compusă

Se aplică atunci când în probleme intervin 3 sau mai multe mulţimi (fiecare având câte 2 elemente cunoscute, iar o mulţime cu un element cunoscut şi unul necunoscut). Determinarea necunoscutei se face aplicând succesiv „regula de trei simplă”.

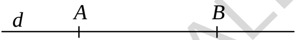
GEOMETRIE

PUNCTUL

Definiție: Figura geometrică elementară, fără nicio dimensiune.
Puncte distincte: Fie A, B: $A \neq B$.
Puncte confundate: Fie A, B: $A = B$.

DREAPTA

Definiție: Drumul cel mai scurt, în spaţiu, dintre două puncte distincte între ele, prelungit în ambele sensuri oricât de mult.
Proprietăți: Dreapta are lungime infinită.



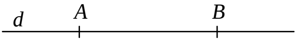
PUNCTE COLINIARE

Definiție: Trei sau mai multe puncte care aparţin aceleiaşi drepte.

SEGMENTUL DE DREAPTĂ

Definiție: Porţiunea dintr-o dreaptă d, cuprinsă între două puncte A şi B.

Notații: (AB) segment deschis (nu conţine punctele A şi B)
[AB] segment închis (conţine şi punctele A şi B)
[AB) segment semideschis (îl conţine pe A, dar nu şi pe B)



• Două segmente care au aceeaşi lungime se numesc segmente congruente.
Exemplu: AB = 5,3 cm şi CD = 5,3 cm $\Rightarrow$ AB şi CD sunt congruente. Notăm $[AB] \equiv [CD]$.
• Un punct M este mijlocul unui segment [AB] dacă M este situat între A şi B, iar $[AM] \equiv [MB]$.

SEMIDREAPTA

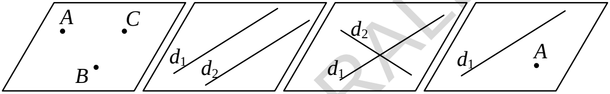
Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte opuse.

PLANUL

Definiție: Figura geometrică formată din toate dreptele care trec printr-un punct *M* dat (care nu aparţine unei drepte *d*) şi un punct *P*, care parcurge dreapta *d* în întregime.

Proprietăți:

1. Trei puncte distincte determină un plan.
2. Două drepte concurente sau paralele determină un plan.
3. O dreaptă şi un punct care nu-i aparţine determină un plan.



SPAŢIUL GEOMETRIC

Definiție: Suprafaţa care conţine toate planele paralele şi neparalele cu un plan dat.

UNGHIUL

Definiție: Figura geometrică formată din două semidrepte (d_1 şi d_2) care au aceeaşi origine *O*.

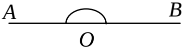
Laturile unghiului – cele două semidrepte.

Vârful unghiului – originea comună a celor două semidrepte.

Măsura unghiului: se face prin măsurarea deschiderii dintre semidreptele care formează unghiul. Ea se determină cu ajutorul arcelor de cerc, socotind că un semicerc are 180°. Deci, unitatea de măsură este unghiul de 1°.

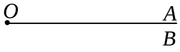
Două unghiuri care au aceeaşi măsură se numesc unghiuri congruente. Notăm $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ sau $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF)$.

Unghiul alungit (180°)



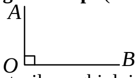
Format din două semidrepte opuse.

Unghiul nul (0°)



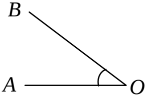
Unghiul ale cărui laturi se confundă.

Unghiul drept (90°)

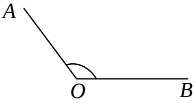


Laturile unghiului sunt perpendiculare.

Unghiul ascuţit (< 90°)



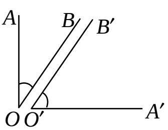
Unghiul obtuz (> 90°)



Unghiul în jurul unui punct (= 360°)

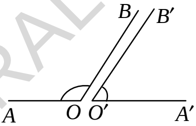
Unghiuri complementare

m(∢AOB) + m(∢$A'O'B'$) = 90°



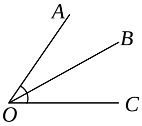
Unghiuri suplementare

m(∢AOB) + m(∢$A'O'B'$) = 180°



Unghiuri adiacente

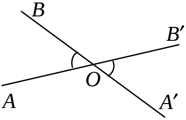
Definiție: Două unghiuri care au o latură comună, iar celelalte două laturi situate de o parte şi de alta a acesteia.



Unghiuri opuse la vârf

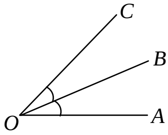
Definiție: Unghiuri formate de două drepte care se intersectează.

∢AOB ≡ ∢$A'OB'$



Bisectoarea unui unghi

Definiție: Semidreapta cu originea în vârful unghiului care împarte un unghi în două părţi egale. Bisectoarea este locul geometric al punctelor egal depărtate de laturi.



• Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.

• Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

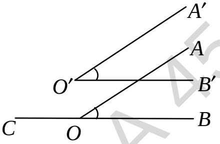
Unghiuri cu laturile paralele

$OB \parallel O'B'$

$OA \parallel O'A'$

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ (egale)

$\sphericalangle AOC + \sphericalangle A'O'B' = 180°$ (suplementare)



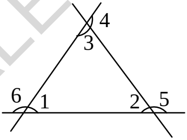
Unghiuri exterioare unui triunghi

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3$

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2$

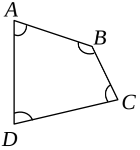
Măsura unghiului exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor neadiacente lui.



Unghiuri într-un patrulater

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$

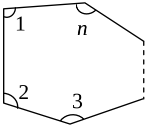
Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.



Unghiuri într-un poligon convex cu *n* laturi

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \ldots + \sphericalangle n = (n - 2) \cdot 180°$

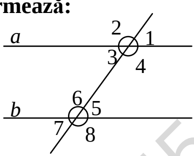
Suma măsurilor tuturor unghiurilor dintr-un poligon convex cu *n* laturi este $(n - 2) \cdot 180°$.



Drepte paralele

Definiție: Două drepte distincte și coplanare sunt paralele dacă nu au niciun punct comun. (*Notație:* $a \parallel b$ sau $AB \parallel CD$.)

O secantă şi două drepte paralele ($a \parallel b$) formează:



- **Unghiuri alterne interne congruente**

$\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$.

- **Unghiuri alterne externe congruente**

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$.

- **Unghiuri corespondente congruente**

$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$.

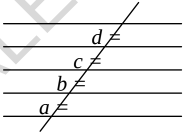
- **Unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplementare**

$\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180°$; $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 = 180°$.

- **Unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei suplementare**

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180°$; $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180°$.

Paralelele echidistante determină pe o secantă segmente egale.
$a = b = c = d$



PERPENDICULARE ŞI OBLICE

Definiție: Vom numi **perpendiculară** pe o dreaptă dată d orice dreaptă d', concurentă cu d, care face cu aceasta un unghi cu măsura de 90°.
Notație: $d \perp d'$
Distanţa de la un punct la o dreaptă este **perpendiculara** din punct pe acea dreaptă.
Definiție: Vom numi **oblică** faţă de d orice dreaptă d', concurentă cu dreapta d, care face cu aceasta un unghi propriu diferit de 90°.

PROIECȚII ORTOGONALE

Proiecţia unui punct A pe dreapta d este piciorul perpendicularei duse din A la d.